Solution de la séance d'exercices 6 : Théorème de convergence monotone, dominée et Lemme de Fatou (suite)

Exercice 1 On cherche une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour μ-presque tout $x \in \Omega$, étant donné un $\varepsilon > 0$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ (dépendant à priori de x) vérifiant $j \geq k \Rightarrow |f_{n_j}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Il suffit de montrer que pour μ-presque tout x, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $j \geq k \Rightarrow |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^k}$. Cela revient à montrer que le complémentaire de l'ensemble

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j\geq k} \left\{ |f_{n_j} - f| < \frac{1}{2^j} \right\}$$

est de mesure nulle. Or

$$A^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j\geq k} \left\{ |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2^j} \right\}.$$

Posons $B_k := \bigcup_{j\geq k} \left\{ |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2^j} \right\}$. On a $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \ldots$ donc par continuité de la mesure, il vient :

$$\mu(A^c) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_k).$$

Par σ-additivité, on a :

$$\mu(B_k) \;\leq\; \sum_{j\geq k} \mu\left(\left\{ |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2^j} \right\} \right).$$

On définit alors la sous-suite $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante. Puisque f_n converge vers f en mesure, il existe un indice n_1 tel que pour $n \geq n_1$,

$$\mu\left(\left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{2} \right\} \right) \leq \frac{1}{2}.$$

Il existe un indice $n_2 > n_1$ tel que pour $n \geq n_2$,

$$\mu\left(\left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{2^2} \right\} \right) \leq \frac{1}{2^2},$$

et ainsi de suite : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $n_k > n_{k-1}$, tel que pour $n \geq n_k$

$$\mu\left(\left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{2^k} \right\} \right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pour cette sous-suite on a alors :

$$\mu(B_k) \;\leq\; \sum_{j\geq k} \mu\left(\left\{ |f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2^j} \right\} \right) \;\leq\; \sum_{j\geq k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

On a bien

$$\mu(A^c) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_k) = 0.$$

Exercice 2 La fonction de Dirichlet restreint à l'intervalle $[a, b]$, $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\big|_{[a,b]}(x)$, est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue vaut 0. Mais elle n'est pas intégrable au sens de Riemann : $\underline{S}(f, \tau) = 0$ et $\overline{S}(f, \tau) = b - a$ pour toute subdivision τ de l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 3 (a) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(1+\frac{x}{n})^n$ est une suite croissante et que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\,\frac{x^k}{k!},$$

où $\quad a_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}.$

Les assertions suivantes sont vraies :

i.) $a_{n+1,k} \geq a_{n,k}$. En effet, $\frac{n+1-l}{n+1} \geq \frac{n-l}{n}$ pour $l \in \mathbb{N}$ car $n^2+n-l\cdot n \geq n^2+n-l\cdot n-l$,

ii.) $a_{n,k} < 1$ (évident) ;

iii.) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k} = 1$.

Comme $a_{n+1,n+1} > 0$, $\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}\frac{x^k}{k!} > \sum_{k=0}^{n} a_{n+1,k}\frac{x^k}{k!}$. Il s'ensuit donc de (i) que la suite $\left\{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right\}$ est croissante. Les assertions (ii) et (iii) impliquent que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$$

et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

(b) Par le théorème de convergence monotone, on a pour $b > 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}_+}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}d\lambda(x) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}_+}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}d\lambda(x)\\ &= \textstyle\int_0^\infty e^{(1-b)x}d\lambda(x) = \frac{1}{b-1}.\end{aligned}$$

Exercice 4 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}.$$

En effet, comme $\ln y \leq y-1$ pour $y > 0$, on a $\ln y^{-\frac{1}{n}} \leq y^{-\frac{1}{n}}-1$, c'est-à-dire $\left(1-\frac{\ln y}{n}\right)^n \leq y^{-1}$. Ainsi, en posant $x = \ln y$, il vient $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\left(-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right)},$$

où $\lim_{u\to0}\varepsilon(u) = 0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$.
Posons $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^m \mathbb{1}_{[0,n]}$. Alors en utilisant le théorème de convergence dominée et sachant que $\Gamma(m+1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^m dx = m!$, on obtient le résultat.

b) Soit $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\mathbb{1}_{[0,n]}$. Comme la suite $\{f_n(x)\}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$, on obtient le résultat en appliquant le théorème de convergence monotone.

Exercice 5 Cf le théorème 24.2 dans le polycopié de Marc Troyanov.

Exercice 6 a) Notons $g(x,y) = e^{-ixy}f(x)$. Alors,

i.) pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,y)$ est mesurable ;

ii.) pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (pour tout les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ est finie) la fonction $y \mapsto g(x, y)$ est continue pour tout $y \in \mathbb{R}$;

iii.) $|g(x, y)| = |e^{-ixy} f(x)| \leq |f(x)|$ et $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$.

On doit montrer que pour tout suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers y, on a $\lim_{n \to +\infty} \hat{f}(y_n) = \hat{f}(y)$. Posons $g_n(x) = g(x, y_n)$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{f}(y_n) \; := \; \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x, y) dx =: \hat{f}(y).$$

Ainsi $\hat{f}$ est continue.

b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-ixy} f(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_{L_1}$ et donc

$$\sup |\hat{f}| \leq \|f\|_{L_1}.$$

c) Soit $g(x, y) = e^{-ixy} f(x)$. Alors, on a

i.) pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x, y)$ est intégrable ;

ii.) pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $y \mapsto g(x, y)$ est dérivable pour tout $y \in \mathbb{R}$;

iii.) $|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}| = |-ixe^{-ixy} f(x)| \leq |xf(x)|$ avec $x \mapsto xf(x)$ intégrable.

Ainsi, d'après l'exercice 5 ou le théorème 24.2 du polycopié de Marc Troyanov, on a

$$\frac{d}{dy}\hat{f} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy}(-ixf(x)) dx = \widehat{-iyf(y)}.$$