Séance d'exercices 7 : Espaces $L^p(\mu)$

le 5 décembre 2006

Definition 1 Étant donné un espace mesuré (Ω, Σ, μ), on note pour $1 \leq p < +\infty$,

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \|f\|_p < +\infty\}, \quad \text{avec} \quad \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et}$$
$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \|f\|_\infty < +\infty\}, \text{ avec } \|f\|_\infty := \inf\{M \geq 0, |f| \leq M \ \mu - \text{pp}\}.$$

On définit les espaces $L^p(\mu)$ comme les espaces vectoriels quotients de $\mathcal{L}^p(\mu)$ par la relation d'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \mu -$ presque partout.

1 Inégalités de Young et de Hölder

Exercice 1

1. Soit $a, b \geq 0$ et soit $p, q \in (1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(on dit que p et q sont conjugués au sens de Young)*. Montrer l'inégalité de Young :
$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$
On pourra considérer la fonction $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$.
2. Soit de nouveau $p, q \in (1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\lambda > 0$
$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_\Omega |f|^p \, d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_\Omega |g|^q \, d\mu.$$
Optimiser cette inégalité par rapport à λ et montrer l'inégalité de Hölder :
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$
Cette inégalité est-elle vraie pour $p = 1$ et $q = +\infty$?
3. Soient p et p' dans $[1, +\infty)$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si f appartient à $L^p(\mu) \cap L^{p'}(\mu)$, alors f appartient à $L^r(\mu)$ pour tout r compris entre p et p'.
4. Montrer que si μ est une mesure finie alors
$$L^\infty(\mu) \subset \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mu),$$
et, pour tout f,
$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$
5. Montrer que si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $f \cdot g \in L^r(\mu)$ et
$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

2 Théorème de complétude de Riesz

Théorème 1 (Riesz) Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\mu)$ est complet.

Théorème 2 Soit p tel que $1 \leq p \leq +\infty$ et soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$ convergeant vers une fonction $f \in L^p(\mu)$. Alors il existe une sous-suite de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge ponctuellement presque-partout vers f.

Exercice 2 *Le but de cet exercice est de démontrer les Théorèmes 1 et 2.*

1. *Cas de* $L^\infty(\mu)$.
   (a) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. Pour $k, m, n \geq 1$, considérons les ensembles

   $$A_k := \{x \in \Omega, |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\} \ ; \quad B_{m,n} := \{x \in \Omega, |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}.$$

   Montrer que $E := \bigcup_k A_k \bigcup_{n,m} B_{m,n}$ est de mesure nulle.

   (b) Montrer que sur le complémentaire de E, la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

   (c) En déduire que $L^\infty(\mu)$ est complet.

2. *Cas de* $L^p(\mu)$.
   (a) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}$.

   (b) Posons

   $$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$

   où g est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\|g_k\|_p < 1$, puis que $\|g\|_p \leq 1$.

   (c) En déduire que la série

   $$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right)$$

   est absolument convergente pour presque tout $x \in \Omega$. Notons $f(x)$ sa somme lorsque celle-ci est finie et posons $f(x) = 0$ sinon. Vérifier que f est la limite ponctuelle des $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour presque tout $x \in \Omega$.

   (d) Montrer que $f - f_m \in L^p(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$ et que $\|f - f_m\|_p \to 0$ quand $m \to +\infty$. Conclure.

3 Différentiabilité des normes $\|\cdot\|_p$

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. Montrer que la fonction $N\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(t) = \int_\Omega |f(x) + tg(x)|^p \, d\mu$$

est différentiable et que sa dérivée en $t = 0$ est donnée par :

$$\frac{dN}{dt}_{|t=0} = p \int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) \, d\mu,$$

où par convention $|f(x)|^{p-2} f(x) = 0$ lorsque $f = 0$.