Séance d'exercices 8 : Théorème de Fubini-Tonelli et convolutions

le 12 décembre 2006

1 Théorème de Fubini-Tonelli

Exercice 1 Soit $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Montrer que

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)dy \neq \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dy\right)dx.$$

Y a-t-il contradiction avec le théorème de Fubini ? (on pourra calculer l'intégrale de $|f|$ sur l'anneau $S_\varepsilon = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \varepsilon \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.)

Exercice 2 Montrer que la fonction $(x,y)\mapsto e^{-y}\sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times(0,+\infty)$; en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}(\sin y)^2 e^{-y}\,dy.$$

2 Produit de convolution

Exercice 3 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue. Montrer que, pour presque tout $x\in\mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et que le *produit de convolution* de f et g défini par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

vérifie $f*g(x) = g*f(x)$ et

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\,\|g\|_p.$$

Exercice 4 Soient $a,b>0$, et f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x) = e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. Calculer $f*g(x)$.

Exercice 5

1. Pour tout $t>0$, on pose :

$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

   (a) Montrer que, pour tout $t>0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1$.

   (b) Montrer que, pour tout $\delta>0$, $\lim_{t\to0}\int_{\{|x|>\delta\}} f_t(x)\,dx = 0$.

   (On dit que f_t est une *approximation de l'unité.*)

2. Soit g une fonction continue bornée. Montrer que $f_t * g$ est bien définie et que

$$\lim_{t\to0} f_t * g(x) = g(x).$$

Exercice 6 Soient $f,g\in L^1(\mu)$ où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{-2\pi i(y,x)}\,dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

(a) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\, dx.$

(b) $\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g}.$

Exercice 7 Calculer la transformée de Fourier de la Gaussienne définie pour $x \in \mathbb{R}^n$ par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$, où $a > 0$.