# Solution de la séance d'exercices 8 : Théorème de Fubini-Tonelli et convolutions

## 1 Théorème de Fubini-Tonelli

**Exercice 1** On a

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{x}{(x^2+y^2)}\Big|_{-1}^{1}\right)dy$$
$$= -\int_{-1}^{1}\frac{2}{(1+y^2)}dy = -2\arctan y\Big|_{-1}^{1} = -\pi.$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{y}{(x^2+y^2)}\Big|_{-1}^{1}\right)dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\frac{2}{(x^2+1)}dx = 2\arctan x\Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

Il n'y a pas de contradiction avec le théorème de Fubini car la fonction $f$ n'appartient pas à $\mathcal{L}^1([-1,1]\times[-1,1])$. En effet, soit $S_\varepsilon = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \varepsilon \le x^2+y^2 \le 1\}$. On a

$$\int_{[-1,1]\times[-1,1]}|f|d\mu \ge \int_{S_\varepsilon}|f|d\mu = \int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 \frac{|\cos 2\theta|}{r}drd\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\cos 2\theta|}{r}drd\theta = -2\sqrt{2}\log\varepsilon \to \infty$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, et donc $f \notin \mathcal{L}^1([-1,1]\times[-1,1])$.

**Exercice 2** Le théorème de Tonelli donne :

$$\int_{[0,1]\times(0,+\infty)}|e^{-y}\sin 2xy|\,dxdy \le \int_0^{+\infty}e^{-y}\,dy = 1 < +\infty,$$

ce qui prouve que la fonction $(x,y)\mapsto e^{-y}\sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0,1]\times(0,+\infty)$.
Le théorème de Fubini donne alors la valeur $I$ de l'intégrale de cette fonction :

$$I = \int_0^1 dx\int_0^{+\infty}e^{-y}\sin 2xy\,dy \overset{\text{(IPP)}}{=} \int_0^1 (2x)(1+4x^2)^{-1}\,dx = \frac{\log 5}{4}$$
$$I = \int_0^{+\infty}e^{-y}\,dy\int_0^1\sin 2xy\,dx = \int_0^{+\infty}e^{-y}\,\frac{\sin^2 y}{y}\,dy.$$

## 2 Produit de convolution

**Exercice 3** Soient $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1\le p\le+\infty$, où $\mathbb{R}^n$ est muni de la mesure de Lebesgue. L'identité $f*g(x) = g*f(x)$ s'obtient par changement de variable. En ce qui converne l'inégalité $\|f*g\|_p \le \|f\|_1\,\|g\|_p$, on distingue les cas en fonction de la valeur de $p$.

(a) Pour $p=+\infty$, c'est clair.

(b) Supposons que $p = 1$ et posons $F(x, y) = f(x - y)\, g(y)$. Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|\, dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|\, dx = |g(y)| \cdot \|f\|_1,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|\, dx = \|f\|_1\, \|g\|_1.$$

D'après le théorème de Tonelli, $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|\, dy < +\infty \qquad \text{pour presque tout } \ x \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)|\, dy \leq \|f\|_1\, \|g\|_1.$$

Ainsi,

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} dx |f * g(x)| = \int_{\mathbb{R}^n} dx \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(x, y)\, dy \right| \leq \|f\|_1\, \|g\|_1.$$

(c) Supposons que $1 < p < +\infty$. D'après le cas précédent, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, la fonction $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, i.e. la fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $p'$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}$ appartient à $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ car $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et la mesure de Lebesgue est invariante par translation. D'après l'inégalité de Hölder,

$$|f(x - y)|\, |g(y)| = |f(x - y)|^{\frac{1}{p}}\, |g(y)| \cdot |f(x - y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|\, |g(y)| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|\, |g(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_1^{\frac{1}{p'}},$$

ainsi

$$|(f * g)(x)|^p \leq (|f| * |g|^p)(x) \cdot \|f\|_1^{\frac{p}{p'}}.$$

D'après le cas précédent, on voit que

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_p^p \leq \|f\|_1 \|g\|_p^p \cdot \|f\|_1^{\frac{p}{p'}},$$

c'est-à-dire

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

**Exercice 4** Soient $a, b > 0$, et $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x) = e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. On a

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{a|x-y|^2 + b|y|^2}{2}\right)}\, dy$$

Or

$$\begin{aligned}
a|x - y|^2 + b|y|^2 &= \sum_{i=1}^{n} ax_i^2 + (a + b)y_i^2 - 2ax_i y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} ax_i^2 + (a + b) \left( y_i - \frac{a}{a + b} x_i \right)^2 - (a + b) \left( \frac{ax_i}{a + b} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left( a - \frac{a^2}{a + b} \right) x_i^2 + (a + b) \left( y_i - \frac{a}{a + b} x_i \right)^2 \\
&= \frac{ab}{a + b} |x|^2 + (a + b) \left| y - \frac{a}{a + b} x \right|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f*g(x) \;=\; e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(a+b)}{2}\left|y-\frac{a}{a+b}x\right|^2} dy = e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(a+b)}{2}|z|^2} dz$$

car la mesure de Lebesgue est invariante par translation. En utilisant $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, on obtient alors :

$$f*g(x) = \left(\frac{2\pi}{a+b}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{ab}{a+b}\frac{|x|^2}{2}}.$$

**Exercice 5** 1. Pour tout $t>0$, on pose :

$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

(a) On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}}\,dx_i.\end{aligned}$$

Sachant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1.$$

(b) Soit $\varepsilon>0$. Puisque $f_1$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, il existe un $R>0$ tel que

$$\int_{\mathcal{B}(0,R)^c} f_1(x)\,dx < \varepsilon.$$

On remarque que $f_t(x) = t^{-\frac{n}{2}}\, f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} f_t(x)\,dx &= \int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} t^{-\frac{n}{2}}\, f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\,dx = t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathcal{B}\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}}\right)^c} f_1(z)\, t^{\frac{n}{2}}\,dz \\ &= \int_{\mathcal{B}\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}}\right)^c} f_1(z)\,dz \le \varepsilon,\end{aligned}$$

dès que $t < \frac{\delta^2}{R^2}$.

2. Soit $g$ une fonction continue bornée. Alors il existe $M>0$ tel que $|g|<M$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_t(x-y)\,g(y)|\,dy \le M \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x-y)\,dy = M < +\infty,$$

ainsi $y \mapsto f_t(x-y)\,g(y)$ est intégrable et $f_t * g$ est bien définie. Puisque $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,dx = 1$, on a

$$|f_t*g(x)-g(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)g(x-y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)g(x)\,dy\right| \le \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy.$$

Soit $\varepsilon>0$. Puisque $g$ est continue en $x\in\mathbb{R}^n$, il existe $\delta>0$ tel que $|y|<\delta \Rightarrow |g(x-y)-g(x)|<\varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}|f_t*g(x)-g(x)| &\le \int_{\mathcal{B}(0,\delta)} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy + \int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,|g(x-y)-g(x)|\,dy \\ &\le \varepsilon \int_{\mathcal{B}(0,\delta)} f_t(y)\,dy + 2M \int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy \\ &\le \varepsilon + 2M \int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy.\end{aligned}$$

D'après la question 1.(b), il existe $t_0 > 0$ tel que pour $t < t_0$, $\int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} f_t(y)\,dy \le \frac{\varepsilon}{2M}$. Ainsi pour $t < t_0$,

$$|f_t * g(x) - g(x)| < 2\varepsilon,$$

i.e.

$$\lim_{t\to 0} f_t * g(x) = g(x).$$

**Exercice 6** Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i (y,x)}\, dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

(a) On a $\|\hat{g}\|_\infty \le \|g\|_1$, ce qui implique que $f\,\hat{g}$ est intégrable. De même $\hat{f}\,g$ est intégrable. De plus $F(x,y) = f(x)g(y)e^{-2\pi i(x,y)}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} dx\, f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i(x,y)}\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy\, g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(x,y)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)g(y)\,dx.\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f*g(y)\,e^{-2\pi i(x,y)}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy\, e^{-2\pi i(x,y)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\,g(z)\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} dz\, e^{-2\pi i(x,y-z)} e^{-2\pi i(x,z)} f(y-z)\,g(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,u)} f(u)\,du \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,z)}\, g(z)\,dz \\ &= \hat{f}(x)\,\hat{g}(x).\end{aligned}$$

**Exercice 7** Supposons tout d'abord $n = 1$. Soit la Gaussienne définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}$, où $a > 0$. Posons

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i t x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi i t x}\,dx.$$

D'après le théorème de convergence dominée, $h$ est dérivable et

$$\begin{aligned}h'(t) &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi i t x}\,dx = \left[2\pi i \frac{1}{a} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi i t x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + (2\pi i)^2 t \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi i t x}\,dx \\ &= -(2\pi)^2 \frac{1}{a} t \cdot h(t).\end{aligned}$$

De plus,

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,du \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.$$

La solution de l'équation différentielle $h'(t) = -(2\pi)^2 \frac{1}{a} t \cdot h(t)$ avec condition initiale $h(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}$ est

$$h(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{t^2}{2}}.$$

Pour $n > 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(t,x)}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{a|x|^2}{2}} e^{-2\pi i(t,x)}\,dx \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax_i^2}{2}} e^{-2\pi i t_i x_i}\,dx_i = \prod_{i=1}^n h(t_i) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{(2\pi)^2}{a}\frac{|t|^2}{2}}\end{aligned}$$