Séance d'exercices 9 : Intersections des L^p et convergences

le 19 décembre 2006

1 Cas d'une mesure finie

Exercice 1 Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

1. Montrer que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p$, on a :
$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$
2. Soit $\mathcal{B}^{n-1}(0,1)$ la boule unité centrée en 0 de $\mathbb{R}^n$. En considérant les fonctions
$$f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$$
montrer que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathcal{B}^{n-1}(0,1)) \subset L^q(\mathcal{B}^{n-1}(0,1))$ est stricte.

2 Cas de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$

Exercice 2 Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note ℓ^p l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté ℓ^∞.

1. Montrer que si $q \leq p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p$, on a :
$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$
2. En considérant les suites $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$, montrer que pour $q < p$, l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte.

3 Cas de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 3 Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. (a) Pour quelle valeur de α la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$?
   (b) Pour quelle valeur de β la fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$?
   (c) Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$. En utilisant (a) et (b), trouver une fonction f qui appartienne à $L^q(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^p(\mathbb{R}^n)$ et une fonction g qui appartienne à $L^p(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^q(\mathbb{R}^n)$.
2. (a) Soit $1 \leq q < p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$.
   (b) Soit r tel que $q < r < p$. Montrer que
$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$
   où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$. On pourra écrire $r = r\alpha + r(1-\alpha)$ et utiliser l'inégalité de Hölder pour un couple de réels conjugués bien choisi.

(c) En déduire que si f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors f_n converge vers f dans $L^r(\mathbb{R}^n)$, i.e $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.

3. Soit $f \in L^p([0,+\infty[) \cap L^q([0,+\infty[)$ avec $1 \leq q < 2 < p$. Montrer que la fonction h définie par $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$ appartient à $L^1([0,+\infty[)$ et trouver des constantes $C_{p,q}$ et γ telles que $\|h\|_1 \leq C_{p,q} \|f\|_q^{\gamma} \|f\|_p^{(1-\gamma)}$.

4 Convergences

Exercice 4 Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{1}_{[n,2n]}(x).$$

1. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$.
2. Montrer que f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $p > 2$.

Exercice 5 Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{n} \mathbb{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans $L^2([0,+\infty[)$.
2. Montrer que f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$ pour $p < 2$.