Solution de la séance d'exercices 9 : Intersections des L^p et convergences

1 Cas d'une mesure finie

Exercice 1 Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, notons $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f\ : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

1. Si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors
$$\int_\Omega |f|^p(x)\,dx \leq \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < +\infty,$$
ainsi $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ pour tout p et $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$. Montrons que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Soit $f \in L^p(\Omega)$, on a par exemple :
$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^q(x)\,dx &= \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^q(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} |f|^q(x)\,dx \\ &\leq \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^p(x)\,dx + \int_{\{|f|<1\}} 1\,dx \\ &\leq \|f\|_p^p + \mu(\Omega) < +\infty.\end{aligned}$$
Ou encore, en utilisant l'inégalité de Hölder pour les réels conjugués $r = \frac{p}{q} > 1$ et $r' = \frac{p}{p-q}$:
$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^q(x)\,dx &= \left(\int_\Omega |f|^{q\cdot\frac{p}{q}}(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-q}}(x)\,dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\ &= \|f\|_p^q\ \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}},\end{aligned}$$
ce qui implique :
$$\|f\|_q \leq \|f\|_p \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{qp}}.$$
En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$:
$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

2. Montrons que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathcal{B}^{n-1}(0,1)) \subset L^q(\mathcal{B}^{n-1}(0,1))$ est stricte. La fonction f_α appartient à $L^\infty(\mathcal{B}^{n-1}(0,1))$ si et seulement $\alpha \leq 0$, et à $L^p(\mathcal{B}^{n-1}(0,1))$ avec $p < +\infty$ si et seulement si
$$p\alpha - n + 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{n}{p}$$
Soit $1 \leq q < p$, alors $f_{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}$ appartient à $L^q(\mathcal{B}^{n-1}(0,1)) \backslash L^p(\mathcal{B}^{n-1}(0,1))$. En particulier, $f_{\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\right)}$ appartient à $L^q(\mathcal{B}^{n-1}(0,1)) \setminus L^\infty(\mathcal{B}^{n-1}(0,1))$.

2 Cas de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$

Exercice 2 Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note ℓ^p l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté ℓ^∞.

1. Montrons que si $q \leq p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Comme

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^q < +\infty,$$

il existe un rang N tel que pour $n > N$, $|u_n|^q < 1$. En particulier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^∞ et

$$\|u\|_\infty \leq \max\{u_0, \ldots, u_N, 1\}.$$

De plus, pour $n > N$, on a $|u_n|^p \leq |u_n|^q$ et

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^p \leq \sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^q \leq \|u\|_q^q < +\infty,$$

ce qui implique que $\|u\|_p < +\infty$. En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$, on a :

$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$

2. La suite $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$ appartient à ℓ^∞ pour tout $\alpha \geq 0$ et à ℓ^p avec $1 \leq p < +\infty$ si et seulement si $\alpha p > 1$, i.e $\alpha > \frac{1}{p}$. En particulier la suite constante égale à 1 appartient à ℓ^∞ mais n'appartient à aucun ℓ^p pour $p < +\infty$. Soit $1 < q < p < +\infty$. Pour tout α tel que $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}$, la suite $u^{(\alpha)}$ appartient à $\ell^p \setminus \ell^q$. C'est le cas en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$. Ainsi l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte lorsque $q < p$.

3 Cas de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 3 Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\ \mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. (a) La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $2\alpha p > n$.
   (b) La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p\beta < n$.
   (c) Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$. La fonction

   $$f(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{n}{p+q}}$$

   vérifient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)$. La fonction

   $$g(x) = |x|^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

   vérifient $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$.

2. (a) Soit $1 \leq q < p < +\infty$ et f_n une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$. Comme $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{p,q}$, f_n est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, donc elle converge vers une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$. De même, $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_{p,q}$, donc f_n converge vers une fonction $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|\cdot\|_q$. De plus, il existe une sous-suite de f_{n_k} qui converge vers f presque-partout et il existe une sous-suite de f_{n_k} qui converge vers g presque-partout. Ainsi $f = g$ μ-p.p. et f_n converge vers $f = g$ dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$.
   (b) Soit r tel que $q < r < p$. Montrons que

   $$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$, $\alpha \in [0,1]$. Puisque $1 = \frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha)r}{q}$, les réels $p' = \frac{p}{\alpha r}$ et $q' = \frac{q}{(1-\alpha)r}$ sont conjugués. D'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{r\alpha}(x)\cdot|f|^{(1-\alpha)r}(x)\,dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\alpha r p'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(1-\alpha)rq'}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p}(x)\,dx\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{q}(x)\,dx\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}} \\
&\leq \|f\|_p^{\alpha r}\|f\|_q^{(1-\alpha)r},
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha}\|f\|_q^{(1-\alpha)}$. On peut également écrire $r = \beta q + (1-\beta)p$ avec $\beta \in]0,1[$ et appliquer Hölder avec les réels conjugués $\frac{1}{\beta}$ et $\frac{1}{1-\beta}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\beta q}(x)\cdot|f|^{(1-\beta)p}(x)\,dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{q}(x)\,dx\right)^{\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p}(x)\,dx\right)^{(1-\beta)},
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|f\|_r \leq \|f\|_q^{\frac{q\beta}{r}}\|f\|_p^{\frac{p(1-\beta)}{r}}$$

qui est l'inégalité cherchée car $\alpha = \frac{p\beta}{r}$ vérifie bien $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

(c) Si f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et dans $L^q(\mathbb{R}^n)$, donc dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ d'après l'inégalité précédente. En conclusion, $L^p(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ donc un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.

3. Soit $f \in L^p([0,+\infty[)\cap L^q([0,+\infty[)$ et h la fonction définie par $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}f(r)$. On notera p' le conjugué de p et q' le conjugué de q. Montrons que h appartient à $L^1([0,+\infty[)$. On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr = \int_0^{R} \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr$$

$$\leq \left(\int_0^R r^{-\frac{p'}{2}}\,dr\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^R |f(r)|^p\,dr\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_R^{+\infty} r^{-\frac{q'}{2}}\,dr\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_R^{+\infty} |f(r)|^q\,dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{1-\frac{p'}{2}}\right)^{\frac{1}{p'}} R^{\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_p + \left(\frac{1}{\frac{q'}{2}-1}\right)^{\frac{1}{q'}} R^{\left(\frac{1}{q'}-\frac{1}{2}\right)}\|f\|_q.$$

En optimisant par rapport à R, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|\,dr \quad\leq\quad C_{p,q}\|f\|_p^{1-\gamma}\|f\|_q^{\gamma},$$

où, en posant $\alpha = \frac{1}{2}-\frac{1}{p}$ et $\beta = \frac{1}{2}-\frac{1}{q}$, on a $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, et $C_{p,q} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha^\gamma\beta^{1-\gamma}}\left(1-\frac{p'}{2}\right)^{-\frac{1-\gamma}{p'}}\left(\frac{q'}{2}-1\right)^{-\frac{\gamma}{q'}}$.

4 Convergences

Exercice 4 Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{1}_{[n,2n]}(x).$$

1. Quelque soit g continue à support compact,

$$\int_{[0,+\infty[} f_n(x)g(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_n^{2n} g(x)\,dx \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact, f_n converge faiblement vers 0. D'autre part, f_n converge presque partout vers 0. Supposons que f_n converge fortement vers une fonction f dans $L^2([0,+\infty[)$. Alors il existe une sous-suite de f_n qui converge presque-partout vers f, ce qui implique que $f = 0$ est la seule limite possible. Or :

$$\|f_n\|_2 = 1$$

pour tout n, donc $\|f_n\|_2$ ne tend pas vers $\|f\|_2 = 0$ ce qui contredit le fait que f_n converge vers f dans $L^2([0,+\infty[)$.

2. Pour $p > 2$, on a :

$$\int_{[0,+\infty[} |f_n(x)|\,dx = \int_n^{2n} n^{-\frac{p}{2}}\,dx = n^{1-\frac{p}{2}} \to 0,$$

quand $n \to +\infty$ donc f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$.

Exercice 5 Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{n}\mathbb{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Quelque soit g continue à support compact,

$$\int_{[0,+\infty[} f_n(x)g(x)\,dx = \sqrt{n}\int_n^{n+\frac{1}{n}} g(x)\,dx \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact, f_n converge faiblement vers 0. Comme f_n converge presque partout vers 0 on conclut comme précédemment que f_n ne converge par fortement vers 0 dans $L^2([0,+\infty[)$ car

$$\|f_n\|_2 = 1.$$

2. Pour $p < 2$, on a :

$$\int_{[0,+\infty[} |f_n(x)|\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{2}}\,dx = n^{\frac{p}{2}-1} \to 0,$$

donc f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$.