MATH 2 MINES 91

Notations

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à termes réels ; n est un entier, $n \geq 1$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera supposé muni de la norme euclidienne ; c'est à dire, en désignant les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par des matrices colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \|X\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera muni de la norme subordonnée ; pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|A\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

Il sera admis que, pour tout couple de matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'inégalité :

$$\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|.$$

Partie I

Quelques propriétés de l'exponentielle de matrice

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.1. **a.** Rappeler pourquoi la série de matrices de terme général U_k définie par

$$U_0 = I_n \quad U_k = \frac{1}{k!} A^k, \; k = 1, 2, \ldots$$

est convergente. On note $\exp A$ la somme de cette série.

b. Démontrer l'inégalité : $\|\exp A\| \leq \exp \|A\|$.

c. Établir la relation : $B \exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} BA^k$.

Que penser des matrices $\exp A_1$ et $\exp A_2$ lorsque A_1 et A_2 sont semblables ?

Il sera admis pour la suite que, si deux matrices A et B commutent alors

$$\exp(A + B) = \exp A. \exp B$$

I.2. On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp D$, $\exp F$. On admet que $E = \exp F.D.\exp(-F)$, en déduire $\exp E$.

Comparer $\exp E$ et $\exp F. \exp D$, qu'en penser ?

I.3. Soit f_A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $f_A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$.

a. Établir que f_A est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. En intégrant terme à terme la série donnant $f_A(t)$, exprimer, en fonction de $f_A(x)$ et de I_n, l'expression $A\displaystyle\int_0^x f_A(t)\,\mathrm{d}t$ où x est un réel ; en déduire que la fonction f_A est dérivable et calculer sa dérivée. Montrer que f_A est indéfiniment dérivable.

I.4. **a.** Soit θ un réel donné et C_θ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $C_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $\exp(C_\theta)$.

(Utiliser les égalités $\sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{\theta^{2n}}{(2n)!}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.)

Est ce que l'application $A \mapsto \exp A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est injective ?

b. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que la matrice $\exp(A) - I_n$ peut s'écrire $A(I_n + S_A)$. Établir qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\|A\| < \alpha$ implique $\|S_A\| < 1$.

c. Soit T une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; établir que si $\|T\| < 1$, la matrice $I_n + T$ est inversible.

d. Soit M une matrice appartenant à la boule ouverte $B(0, \alpha)$ de centre la matrice nulle 0 et de rayon α (où α a été défini au b.) ; établir que l'égalité entre les matrices $\exp M$ et I_n est équivalente à la nullité de M.

I.5. Soient B et H deux matrices données de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit k un entier, $k \geq 1$; soit g_k l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$g_k(x) = (B + xH)^k.$$

Les deux matrices B et H ne sont pas supposées commutables.

a. Établir que la fonction g_k est continûment dérivable ; calculer les dérivées des fonctions g_1, g_2, g_3 puis de la fonction g_k.

b. En déduire l'inégalité : $\|(B+H)^k - B^k\| \leq k\|H\|.(\|B\| + \|H\|)^{k-1}$

on utilisera ici l'inégalité des accroissements finis pour les fonctions vectorielles :

$$\|g(1) - g(0)\| \leq \sup_{x\in[0,1]} \|g'(x)\|.$$

I.6. Soit x un réel, $x > 0$; soit $T(A, x)$ la matrice définie par la relation :

$$T(A, x) = \frac{1}{x^2}(\exp(xA) - I_n - xA).$$

a. Démontrer que la fonction $x \mapsto T(A, x)$ se prolonge par continuité en 0.

Montrer que $T(A, x) = A^2 \displaystyle\int_0^1 (1-t)\exp(txA)\,\mathrm{d}t$.

En déduire un majorant simple de sa norme.

b. Soit k un entier, $k \geq 1$; en démontrant et en utilisant la relation :

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k - \exp A = \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right) - \frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right)^k - \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right)^k$$

déterminer, à l'aide de l'inégalité du I.5., la limite de la suite de matrices de terme général $\left(I_n + \dfrac{1}{k}A\right)^k$, $k = 1, 2, \ldots$

c. Démontrer que l'application $A \mapsto \det A$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

On admet que $\det\left(I_n + \dfrac{1}{k}A\right) = 1 + \dfrac{1}{k}\operatorname{Tr}(A) + O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.

En déduire la valeur du déterminant de la matrice $\exp A$.

I.7. Soit x un réel, $x > 0$. Soit $U(A, B; x)$ la matrice définie par la relation

$$U(A, B; x) = \frac{1}{x^2}(\exp(xA).\exp(xB) - I_n - x(A + B)).$$

a. Démontrer que la fonction $x \mapsto U(A, B; x)$ se prolonge par continuité en 0 ; donner un majorant de sa norme.

b. Soit k un entier, $k \geq 1$; déterminer, lorsque k tend vers $+\infty$, la limite de l'expression :

$$P_k = \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right).\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k - \left(I_n + \frac{1}{k}(A + B)\right)^k.$$

c. En déduire, lorsque k tend vers $+\infty$, la limite de la suite des matrices :

$$Q_k = \left(\exp\left(\frac{1}{k}A\right).\exp\left(\frac{1}{k}B\right)\right)^k.$$

Partie II

Groupes à un paramètre

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; G est dit groupe à un paramètre s'il existe un morphisme continu et surjectif du groupe additif $\mathbb{R}$ dans G ; G est muni de la distance induite par la norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le but de cette partie est de montrer, après avoir donné l'exemple du sous-groupe $f_A(\mathbb{R})$, que tout sous-groupe à un paramètre est de ce type.

II.1. Démontrer que, pour une matrice A donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application f_A est un morphisme continu du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; en déduire que $f_A(\mathbb{R})$ est un groupe à un paramètre.

II.2. Démontrer que le groupe $\mathrm{O}^+(2)$ des matrices orthogonales de déterminant 1 est un groupe à un paramètre. Déterminer une matrice A telle que $f_A(\mathbb{R})$ soit $\mathrm{O}^+(2)$.

II.3. Soit α un réel strictement positif ; donner un exemple de fonction g_α polynomiale de degré 4 sur $[-\alpha, \alpha]$, positive continûment dérivable, définie sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$ et telle que : $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)\,\mathrm{d}u = 1$.

(On fera intervenir le polynôme $x^2 - \alpha^2$ et on définira g à une constante multiplicative près que l'on ne demande pas d'évaluer.)

Vérifier brièvement que les fonctions g_α et g'_α sont uniformément continues sur toute la droite réelle.

Soit Φ un morphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, continu pour la distance induite dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ par la norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient M_α, et, pour tout réel t, $\psi(t)$ les matrices définies par les relations :

$$M_\alpha = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_\alpha(u)\Phi(-u)\,\mathrm{d}u, \quad \psi(t) = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g_\alpha(t - u)\Phi(u)\,\mathrm{d}u.$$

II.4. **a.** Démontrer que la fonction $\psi : t \mapsto \psi(t)$, définie dans $\mathbb{R}$, est continûment dérivable (utiliser le fait que g est un polynôme).

b. Soit t_0 un réel donné ($t_0 > 0$) ; démontrer que si $t \in [-t_0, t_0]$, on a :

$$\psi(t) = \int_{-t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} g_\alpha(t - u)\Phi(u)\,\mathrm{d}u.$$

c. Établir les relations : $\psi(t) = M_\alpha.\Phi(t) = \Phi(t).M_\alpha$.

II.5. **a.** Démontrer que la matrice M_α admet une limite, lorsque le réel α tend vers 0 (on utilisera l'inégalité de la norme $\left\| \int_{-\alpha}^{\alpha} F(u)\, \mathrm{d}u \right\| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} \|F(u)\|\, \mathrm{d}u$ pour toute fonction vectorielle et toute norme en dimension finie).

b. Montrer qu'il est possible de choisir α de façon que M_α soit inversible.

c. En déduire que le morphisme Φ, de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, est continûment dérivable.

II.6. **a.** Désignons par A la matrice $\Phi'(0)$. Calculer $\Phi'(t)$ en fonction de A et $\Phi(t)$.

b. Soit $\Omega(t) = \Phi(t) \exp(-tA)$, calculer $\Omega'(t)$, en déduire $\Phi(t)$.