

# DEVOIR SURVEILLÉ 1 DE MATHÉMATIQUES

## M104 filière PC

Aucun document n'est autorisé : ni notes de cours, ni calculatrice, ni téléphone portable. La durée de l'examen est de 2h.

### Questions de cours (5 points) :

1. Soit  $G$  un ensemble muni d'une loi de composition interne  $\star : (x, y) \mapsto x \star y$ . On suppose que cette loi : (a) est *associative* ; (b) est *commutative* ; (c) possède un *élément neutre* noté  $e$ . Rappeler ce que veulent dire ces trois expressions.
2. Que doit satisfaire un ensemble  $G$  muni d'une loi de composition interne  $\star$  pour être qualifié de groupe ?
3. Donner un exemple de groupe.

### Exercice 1 (5 points)

1. Donner la décomposition en cycles à supports disjoints de la permutation de  $\{1, \dots, 16\}$  suivante :

$$c = \left( \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 5 & 6 & 12 & 4 & 1 & 3 & 8 & 7 & 11 & 2 & 13 & 15 & 14 & 16 & 10 & 9 \end{array} \right).$$

2. Quel est l'ordre de la permutation  $c$  ?
3. Quelle est la signature de  $c$  ?
4. Que vaut  $c^{2010}$  ?
5. Donner la décomposition en cycles à supports disjoints de  $c^{2009}$ .

### Exercice 2 (4 points)

Trouver une base du noyau et une base de l'image de la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Problème (6 points)** L'entreprise Les Vents du Nord fabrique des *saxophones*, des *trompettes* et des *tubas*. Le corps de ces instruments est fabriqué en *laiton*, les clefs et les palettes sont en *maillechort*, les pistons et la visserie sont en *acier*. Le tableau ci-dessous résume la quantité de chaque alliage nécessaire à la fabrication d'un saxophone, d'une trompette et d'un tuba :

	saxophone	trompette	tuba
maillechort	1 200 g	100 g	1 000g
laiton	1 100 g	700 g	10 500g
acier	100 g	200 g	500 g

Le laiton, l'acier et le maillechort sont des alliages fabriqués à partir de *fer*, de *carbone*, de *nickel*, de *cuiivre* et de *zinc* dans des proportions différentes. Le tableau ci-dessous résume les proportions de ces matières premières dans 1kg de laiton, 1kg d'acier et 1kg de maillechort :

	maillechort	laiton	acier
fer	0	0	98%
carbone	0	0	2%
nickel	5%	0	0
cuiivre	75%	80%	0
zinc	20%	20%	0

1. L'entreprise veut fabriquer  $x$  saxophones,  $y$  trompettes et  $z$  tubas. Quelles sont les quantités  $M$  de maillechort,  $L$  de laiton et  $A$  d'acier dont l'entreprise a besoin ? Répondre à cette question en utilisant le langage des matrices.
2. Quelles sont les quantités Fe de fer, C de carbone, Ni de nickel, Cu de cuiivre et Zn de zinc que l'entreprise doit commander pour fabriquer  $M$  grammes de maillechort,  $L$  grammes de laiton et  $A$  grammes d'acier ? Répondre à cette question en utilisant le langage des matrices.
3. Quelles sont les quantités Fe de fer, C de carbone, Ni de nickel, Cu de cuiivre et Zn de zinc contenues dans  $x$  saxophones,  $y$  trompettes et  $z$  tubas ? Répondre à cette question en utilisant le langage des matrices.
4. On suppose qu'en fin d'année l'entreprise dispose de  $a$  grammes de fer,  $b$  grammes de carbone,  $c$  grammes de nickel,  $d$  grammes de cuiivre et  $e$  grammes de zinc. A quelle condition sur le vecteur  $(a, b, c, d, e)$  peut-elle transformer entièrement ses stocks de matières premières en instruments ?