SOUTIEN RENFORCÉ : SÉANCE 2

BARBARA TUMPACH

1. Injection, surjection et bijection

Definition 1. *Une application $f\ : X \to Y$ est une injection si :*

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Une application $f\ : X \to Y$ est une surjection si :

$$\forall y \in Y, \exists x \in X, f(x) = y$$

Une application $f\ : X \to Y$ est une bijection si c'est une injection et une surjection, c'est-à-dire si :

$$\forall y \in Y, \exists\ !x \in X, f(x) = y$$

Exercice 1. *Donner un exemple d'application de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$*
a) injective et non surjective
b) surjective et non injective
c) bijective

Definition 2. *On dit qu'un ensemble E est fini s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E sur $\{1, \dots, n\}$.*

Exercice 2. *Soient E et F deux ensembles finis.*
a) Montrer que s'il existe une injection de E dans F, alors card(E) $\leq$ card(F).
b) Montrer que s'il existe une surjection de E sur F, alors card(E) $\geq$ card(F).
c) En déduire que s'il existe une bijection entre E et F, alors card(E) = card(F).

Exercice 3. *Soient E un ensemble à n éléments et F un ensemble à p éléments.*
a) Calculer le nombre d'applications de E dans F.
b) On suppose que $n \leq p$. Calculer le nombre d'applications injectives de E dans F.
c) On suppose que $n = p$. Calculer le nombre d'applications bijectives de E dans F.

Exercice 4. *Montrer que l'application qui a tout entier naturel associe son double est une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble des nombres pairs.*

2. Ensemble plus puissant qu'un autre, ensembles équipotents

Théorème 1 (Cantor-Schröder-Bernstein). *Soient E et F deux ensembles quelconques.*
i) ou bien il existe une injection de E dans F, ou bien il existe une injection de F dans E.
ii) s'il existe a la fois une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E sur F.

Remarque 1. *Ce théorème se démontre simplement pour les ensembles finis, mais pour les ensembles infinis il repose sur un axiome supplémentaire de théorie des ensembles appelé* ***axiome du choix*** *:*

Axiome du choix :
Pour toute famille non vide $E_i, i \in I$ d'ensembles non vides, il existe une application ϕ, appelée fonction de choix, définie sur I, telle que pour tout $i \in I$, $\phi(i) \in E_i$.

Corollaire 1. *Étant donnés deux ensembles E et F, il n'y a que trois possibilités :*
a) Il existe un injection de E dans F mais pas d'injection de F dans E. On dit que E est strictement moins puissant que F ou que F est strictement plus puissant que E.
b) Il existe un injection de F dans E mais pas d'injection de E dans F. On dit que F est strictement moins puissant que E ou que E est strictement plus puissant que F.
c) Il existe une bijection de E sur F. On dit que E et F sont d'égale puissance ou ***équipotents****.*

Théorème 2 (Cantor). *Quelque soit l'ensemble E, l'ensemble des parties de E est strictement plus puissant que E. Autrement dit, il n'existe pas de bijection d'un ensemble sur l'ensemble de ses parties.*

Proposition 1. *Soit E un ensemble. Le quotient de E par une relation d'équivalence est toujours moins puissant que E.*

Corollaire 2. *Soient E et F deux ensembles. S'il existe une surjection de E sur F, F est moins puissant que E.*

3. Ensembles denombrables et non denombrables

Definition 3. *Un ensemble est dit dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$ ou à une partie de $\mathbb{N}$.*

Exercice 5. *En explicitant une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.*

Exercice 6. *a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le nombre de couples $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ telles que $p + q = n$.*

b) Calculer le nombre de couples $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *telles que* $p+q \leq n$.
c) En déduire une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$. *(On commencera par faire un dessin).*

Exercice 7. *En utilisant la proposition 1, montrer que* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

Proposition 2. *Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Definition 4. *Un nombre réel est dit **algébrique** s'il existe un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *dont il est racine. Il est dit **transcendant** dans le cas contraire.*

Exercice 8. *Montrer que tout nombre rationnel est algébrique. Montrer que* $\sqrt{2}, 1+\sqrt{3}, 2+\sqrt[7]{18}$ *sont algébriques.*

Proposition 3. *L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.*

Théorème 3. *L'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable.*

Corollaire 3. *L'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.*