# SOUTIEN RENFORCÉ : SÉANCE 4

BARBARA TUMPACH

## 1. Limites

**Definition 1.** *On définit sur* $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ *une topologie en décrétant qu'un voisinage d'un point* $x_0 \in \mathbb{R}$ *est un voisinage pour la topologie usuelle sur* $\mathbb{R}$ *(c.à.d. un ensemble contenant un intervalle de la forme* $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ *avec* $\epsilon > 0$*), et qu'un voisinage de* $-\infty$ *(resp.* $+\infty$*) est de la forme* $]-\infty, A[$ *ou* $]-\infty, A]$ *(resp.* $]B, +\infty[$ *ou* $[B, +\infty[$*). Une fois qu'un voisinage de chaque point de* $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ *est défini, un ensemble de* $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ *sera dit ouvert s'il contient un voisinage de chacun de ses points.*

**Exercice 1.** *Quels sont les voisinages ouverts de* $-\infty$ *(resp.* $+\infty$*) ?*

**Exercice 2.** *Soit* $f$ *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs réelles, vérifiant* $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$*. Montrer que* $f$ *est bornée.*

## 2. Dérivabilité

**Exercice 3.** *Rappeler les différents énoncés du théorème des valeurs intermédiaires.*

**Exercice 4.** *Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction* $f$ *définie par* $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$*. Etudier la continuité de la fonction dérivée lorsqu'elle existe. Tracer* $f$ *et* $f'$*.*

**Théorème 1. Théoréme de Darboux :** *Une fonction dérivée vérifie le théoréme des valeurs intermédiaires.*

## 3. Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

**Exercice 5.** *Soient* $P$ *et* $Q$ *deux polynômes non nuls. Rappeler pourquoi il est possible d'écrire :*

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{N}{D}$$

*avec degré(N)<degré(D).*

**Exercice 6.** *Soient* $N$ *et* $D$ *deux polynômes tels que degré(N) = 1 et degré(D)=2.*
*a) Supposons que* $D$ *posséde deux racines réelles distinctes* $\alpha$ *et* $\beta$*.*

*Montrer qu'il existe deux constantes réelles $A$ et $B$ telles que : $N = B(x-\alpha) + A(x-\beta)$. En déduire que :*

$$\frac{N}{D} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

*b) Supposons que $D$ possède une racine réelle double $\alpha$. Montrer qu'il existe deux constantes réelles $A$ et $B$ telles que : $N = B(x-\alpha) + A$. En déduire que :*

$$\frac{N}{D} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha}$$

*c) Supposons que $D$ ne possède pas de racines réelles. Quelle est l'écriture de $\frac{N}{D}$ dans ce cas ?*