Academic Abstract of the Project I 5015-N :
Banach Poisson-Lie groups and Integrable systems

Wider research context:

One of ever-present ideas in mathematics is the idea of infinity. At each step one encounters things which are infinitely many — starting from numbers, sets, functions and so on. Having an infinite amount of possible numbers which are needed to describe a real world problem is a typical situation. One says that a variable can assume infinitely many values. This setting is sufficient to describe a position of a particle on a line or a plane pendulum. In order to have more freedom of motion though one needs to take several variables of that type. It allows us for example to describe a motion of a planet in the Solar System (with 6 variables) or a rigid body (with 12 variables). These problems possess usually extra structures, for example geometrical or differential structures which are crucial in the process of finding solutions and describing their behavior. The typical mathematical concept needed in this framework is a smooth n-dimensional manifold. It can be seen as a generalization of the notion of a surface in space to arbitrary dimension. Additionally one uses the notion of a Lie group to describe symmetries of the problem. This approach however is not sufficient to formulate more complicated problems present in contemporary science. For example problems in quantum mechanics or hydrodynamics require an infinite number of variables and new structures are needed. We say that spaces where these systems live are infinite dimensional. Instead of geometry, one usually employs functional analysis which is a branch of mathematics dealing with such spaces.

Approaches:

In the last years there is a trend to apply the methods of functional analysis to the geometry in order to create a rigorous setting for Hamiltonian mechanics on infinite dimensional manifolds. The aim is to create a mathematically consistent framework in which both quantum mechanics and integrable systems can be studied. One of the topic of research is related to the so-called Poisson structures on infinite dimensional manifolds which are a tool which allows an elegant construction of equations and integrals of motion for a system. However taking a tool out of the world of finite dimensional geometry and attempting to apply it in the world of infinite dimensional geometry is often very tricky. Straightforward approach usually fails and unexpected problems present themselves. Understanding the possible pathologies occurring in the infinite-dimensional context is a challenge, and finding good non-trivial examples and counter-examples to the expected situation we are used to in the finite-dimensional context is a big step forward.

Hypotheses/Research/Objectives:

One of the first systems to benefit from geometrical approach was the Korteweg–de Vries equation describing solitary waves traveling without dissipation in the shallow water (so-called solitons). The geometrical object used by Segal and Wilson in 1985 for the description of this system is an infinite-dimensional manifold called the restricted Grassmannian. Understanding the Hamiltonian structure of this infinite-dimensional manifold is at the heart of our research. Hamiltonian mechanics is part of Poisson geometry. The natural action of Lie groups on phase spaces of classical systems leads to the notion of Poisson--Lie groups. For systems with an infinite number of degree of freedom, it is natural to study the concept of Poisson--Lie groups in the framework of Banach geometry. Structures related to the restricted Grassmannian are key examples in the understanding of this theory.

Originality:
The theory of Banach Poisson--Lie groups that we intend to explore is a new concept in the context of infinite-dimensional geometry. Extension to the Fréchet context will allow to study Hamiltonian systems coming from gauge theories. The analysis of Pois-son structures and new integrable systems associated to the restricted Grassmannian using modern geometrical tools is part of the project. This study will allow to increase the understanding of Poisson geometry in the infinite-dimensional setting, and find new links to other known problems.

Primary researchers involved:
Alice Barbora Tumpach (WPI, Vienna) and Tomasz Golinski (University of Bialystok, Poland)

Deutsche Zusammenfassun von Projekt I 5015-N :
Banach Poisson-Lie Gruppen and integrierbare Systeme

Breiterer Forschungskontext:

Eine der allgegenwärtigen Ideen in der Mathematik ist die Idee der Unendlichkeit. Bei jedem Schritt begegnet man Dingen, die unendlich viele sind - ausgehend von Zahlen, Mengen, Funktionen und so weiter. Eine typische Situation besteht darin, unendlich viele mögliche Zahlen zu haben, die zur Beschreibung eines Problems der realen Welt benötigt werden. Man sagt, dass eine Variable unendlich viele Werte annehmen kann. Diese Einstellung reicht aus, um eine Position eines Partikels auf einer Linie oder einem ebenen Pendel zu beschreiben. Um mehr Bewegungsfreiheit zu haben, müssen jedoch mehrere Variablen dieses Typs verwendet werden. Es erlaubt uns zum Beispiel, eine Bewegung eines Planeten im Sonnensystem (mit 6 Variablen) oder eines starren Körpers (mit 12 Variablen) zu beschreiben. Diese Probleme besitzen normalerweise zusätzliche Strukturen, beispielsweise geometrische oder differenzielle Strukturen, die für die Suche nach Lösungen und die Beschreibung ihres Verhaltens von entscheidender Bedeutung sind. Das typische mathematische Konzept, das in diesem Rahmen benötigt wird, ist eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Es kann als Verallgemeinerung des Begriffs einer Oberfläche im Raum auf eine beliebige Dimension angesehen werden. Zusätzlich verwendet man den Begriff einer Lie-Gruppe, um Symmetrien des Problems zu beschreiben. Dieser Ansatz reicht jedoch nicht aus, um kompliziertere Probleme der zeitgenössischen Wissenschaft zu formulieren. Zum Beispiel erfordern Probleme in der Quantenmechanik oder Hydrodynamik eine unendliche Anzahl von Variablen und neue Strukturen sind erforderlich. Wir sagen, dass Räume, in denen diese Systeme leben, unendlich dimensional sind. Anstelle von Geometrie verwendet man normalerweise eine Funktionsanalyse, die ein Zweig der Mathematik ist, der sich mit solchen Räumen befasst.

Ansätze:

In den letzten Jahren gab es einen Trend, die Methoden der Funktionsanalyse auf die Geometrie anzuwenden, um eine strenge Einstellung für die Hamiltonische Mechanik auf unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu schaffen. Ziel ist es, einen mathematisch konsistenten Rahmen zu schaffen, in dem sowohl die Quantenmechanik als auch integrierbare Systeme untersucht werden können. Ein Forschungsthema betrifft die sogenannten Poisson-Strukturen auf unendlich dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die ein Werkzeug sind, das eine elegante Konstruktion von Gleichungen und Bewegungsintegralen für ein System ermöglicht. Es ist jedoch oft sehr schwierig, ein Werkzeug aus der Welt der endlichen dimensionalen Geometrie herauszunehmen und zu versuchen, es in der Welt der unendlichen dimensionalen Geometrie anzuwenden. Ein unkomplizierter Ansatz schlägt normalerweise fehl und es treten unerwartete Probleme auf. Das Verständnis der möglichen Pathologien im unendlichdimensionalen Kontext ist eine Herausforderung, und es ist ein großer Schritt nach vorne, gute nicht triviale Beispiele und Gegenbeispiele für die erwartete Situation zu finden, die wir im endlichdimensionalen Kontext gewohnt sind.

Hypothesen / Forschung / Ziele:

Eines der ersten Systeme, das von einem geometrischen Ansatz profitierte, war die Korteweg-de-Vries-Gleichung, die Einzelwellen beschreibt, die sich ohne Dissipation im seichten Wasser bewegen (sogenannte Solitonen). Das geometrische Objekt, das Segal und Wilson 1985 zur Beschreibung dieses Systems verwendeten, ist eine unendlich dimensionale Mannigfaltigkeit, die als eingeschränkter Grassmannian bezeichnet wird. Das Verständnis der Hamiltonischen Struktur dieser unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeit steht im Mittelpunkt unserer Forschung. Die Hamiltonische Mechanik ist Teil der Poisson-Geometrie. Die natürliche Wirkung von Lie-Gruppen auf Phasenräume klassischer Systeme führt zur Vorstellung von Poisson-Lie-Gruppen. Für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden ist es selbstverständlich, das Konzept der Poisson-Lie-Gruppen im Rahmen der Banach-Geometrie zu untersuchen. Strukturen im Zusammenhang mit dem eingeschränkten Grassmannian sind Schlüsselbeispiele für das Verständnis dieser Theorie.

Originalität:
Die Theorie der Banach Poisson - Lie-Gruppen, die wir untersuchen wollen, ist ein neues Konzept im Kontext der unendlichdimensionalen Geometrie. Durch die Erweiterung des Fréchet-Kontexts können Hamilton-Systeme untersucht werden, die aus Eichentheorien stammen. Die Analyse von Poisson-Strukturen und neuen integrierbaren Systemen, die mit dem eingeschränkten Grassmannian verbunden sind, unter Verwendung moderner geometrischer Werkzeuge ist Teil des Projekts. Diese Studie wird es ermöglichen, das Verständnis der Poisson-Geometrie in der unendlich dimensionalen Umgebung zu verbessern und neue Verbindungen zu anderen bekannten Problemen zu finden.

Beteiligte Primärforscher:
Alice Barbora Tumpach (WPI, Vienna) and Tomasz Golinski (University of Bialystok, Poland)